

## Оптимизация управления в системах с фазовыми ограничениями

А. И. Тятюшкин, Т. С. Зароднюк\*

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск, Россия

\*Контактный автор: Зароднюк Татьяна Сергеевна, e-mail: tz@icc.ru

Поступила 07 февраля 2023 г., доработана 03 мая 2023 г., принята в печать 11 мая 2023 г.

Для задачи оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты рассмотрен итерационный метод поиска численного решения, основанный на редукции к конечномерной задаче и применении к последней алгоритма последовательной линеаризации с использованием модифицированной функции Лагранжа. Для решения линейных вспомогательных задач на итерациях метода используется метод приведенного градиента. Эффективность учета фазовых ограничений при расчете оптимального управления иллюстрируется численным решением прикладных задач из области энергетики и динамики полета.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, управляющие параметры, фазовые ограничения, градиентные методы, модифицированная функция Лагранжа, последовательная линеаризация.

*Цитирование:* Тятюшкин А.И., Зароднюк Т.С. Оптимизация управления в системах с фазовыми ограничениями. Вычислительные технологии. 2023; 28(5):55–69. DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.006.

### Введение

Для прикладных задач оптимального управления характерны нелинейность управляемой системы [1–4], высокая размерность фазового пространства [5–7] и наличие ограничений как на управление, так и на фазовые координаты [8–11]. Применение современной методологии “вычислительного эксперимента”, основанного на триаде модель – метод – программа, к исследованию нелинейных управляемых динамических процессов с ограничениями на фазовые координаты предъявляет особые требования к эффективности методов оптимизации управления и программных средств, ориентированных на решение задач с ограничениями на траекторию динамической системы. Метод штрафов в этих задачах не всегда обеспечивает требуемую на практике точность, поэтому он применяется, как правило, только на первой стадии решения задачи для получения достаточно хорошего начального приближения. Для улучшения управления, обеспечивающего более точное выполнение ограничений и уменьшающего значение целевого функционала, необходимы итерационные методы, в которых ограничения на фазовые координаты учитываются на всем временном интервале еще при расчете вариации управления.

Дискретный аналог непрерывной задачи управления предполагает табличное представление управляющих функций на заданной сетке временного интервала. На итерациях численного метода оптимизации обычно осуществляется выбор таких числовых

значений управляющих функций в узлах этой сетки, при которых с некоторой заданной точностью будут выполнены все ограничения задачи и улучшено значение целевого функционала. Таким образом, редукция к конечномерной задаче открывает возможность использования богатого арсенала методов нелинейного программирования для приближенного решения сложных задач оптимального управления [1–3, 5].

Основой алгоритмического обеспечения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями являются специальные методы решения больших задач линейного программирования. Для решения задач линейного программирования, полученных дискретизацией линейных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, в [2] рассматриваются различные по трудоемкости и требованиям к объему памяти алгоритмы, учитывающие специфические свойства этих задач. Например, задачам, в которых доминирующую роль играют фазовые ограничения, соответствуют задачи линейного программирования с большим числом основных ограничений, а задачам с ограничениями только на правом конце траектории — задачи с большим числом переменных. Решение этих задач алгоритмами со специальным правилом выбора опорных строк и столбцов позволяет избежать появления плохо обусловленных матриц. Кроме того, применение специальной мультипликативной формы с плотной записью мультипликаторов для обратной опорной матрицы блочной структуры позволяет решать задачи больших размеров.

Рассматриваемый в данной статье численный метод также основан на редукции к конечномерной задаче оптимизации и конструктивно учитывает фазовые ограничения путем применения эффективных алгоритмов линейного и нелинейного программирования [2, 3] для решения вспомогательных задач большой размерности. На внешних итерациях этого метода решаются задачи минимизации специально сконструированного нелинейного функционала — модифицированного лагранжиана [2] при линеаризованных на полученном приближении фазовых ограничениях. Приближенное решение этих задач находится итерационным методом приведенного градиента с использованием сопряженной системы для расчета градиентов. Высокая трудоемкость внешней итерации этого алгоритма окупается тем, что наряду с улучшением управления здесь одновременно уточняются и значения двойственных переменных, через которые формируются необходимые условия оптимальности и вычисляется оптимальное управление в задаче с фазовыми ограничениями. Вместе с тем следует отметить, что современные информационные технологии и многопроцессорная вычислительная техника допускают достаточно эффективную реализацию сложных алгоритмов, например, путем применения параллельных вычислений [7, 12]. Программное обеспечение, разработанное на основе данного подхода и реализующее многометодную технологию расчета оптимального управления [6, 7], успешно применяется для решения сложных прикладных задач оптимального управления из различных областей науки и техники [6, 14].

## 1. Постановка задачи

Пусть задан управляемый процесс с управляющими параметрами как в правых частях, так и в начальных условиях

$$\dot{x} = f(x, u, w, t), \quad x(t) \in E^n, \quad u(t) \in E^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad x(t_0) = \Theta(v), \quad w \in R^p, \quad v \in R^n, \quad (1)$$

с терминальными условиями

$$I_i(u) = h_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

и фазовыми ограничениями

$$J_i(u, v) = g_i(x(t), t) = 0, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, s}. \quad (3)$$

Управление и параметры стеснены следующими ограничениями:

$$c_i(u, t) = 0, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, l}, \quad (4)$$

$$u^H(t) \leq u(t) \leq u^B(t), \quad t \in T, \quad v^H \leq v \leq v^B, \quad w^H \leq w \leq w^B. \quad (5)$$

Требуется среди управлений и параметров, удовлетворяющих ограничениям (4), (5), найти такие, которые обеспечивают выполнение условий (3) для управляемого процесса (1) и приводят его в точку фазового пространства, где с заданной точностью будут выполнены условия (2), а функционал

$$I_0(u) = \varphi(x(t_1)) \quad (6)$$

достигнет наименьшего значения.

## 2. Градиенты функционалов. Линеаризация ограничений

Градиенты функционалов  $I_j(u)$ ,  $j = \overline{0, m}$ , с помощью функций  $H^j(\psi_j, x, u, t) = \psi_j'(t)f(x, u, t)$  и сопряженной системы

$$\dot{\psi}_j = -f_x(x, u, t)' \psi_j(t), \quad \psi_j(t_1) = -\varphi_x^j(x(t_1))$$

традиционно определяются по формулам

$$\nabla I_j(u) = -H_u^j(\psi_j, x, u, t), \quad j = \overline{0, m}.$$

Для каждого  $t \in T$  можно аналогично вычислить градиенты  $J_j(u, t)$ ,  $j = \overline{1, s}$ :

$$\nabla I_j(u, t) = -\bar{H}_u^j(\Phi_j, x, u, t, \tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1,$$

где  $\bar{H}^j(\Phi_j, x, u, t, \tau) = \Phi_j'(t, \tau)f(x, u, \tau)$ ,  $\Phi_j(t, \tau)$ ,  $j = \overline{1, s}$ , — решения сопряженной системы

$$\frac{\partial \Phi_j(t, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial f(x, u, \tau)}{\partial x} \Phi_j(t, \tau), \quad \tau \in [t_0, t],$$

с краевыми условиями

$$\Phi_j(t, t) = -\frac{\partial g^j(x(t))}{\partial x}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Матрица-якобиан линеаризованных ограничений составляется из градиентов  $\nabla I_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , и  $\nabla J_j(t)$ ,  $j = \overline{1, s}$ ,  $t \in T$ , и так как правые части и начальные условия системы (1) зависят еще и от параметров, необходимо иметь также градиенты функционалов  $I_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , и  $J_j(t)$ ,  $j = \overline{1, s}$ ,  $t \in T$ , по этим параметрам [1]

$$\nabla_v I_i(u^k, w^k, v^k) = -\psi_i(t_0)' \Theta(v^k), \quad i = \overline{1, m}, \quad \nabla_w I_i(u^k, w^k, v^k) = -\int_{t_0}^{t_1} \psi_i(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t) dt, \quad (7)$$

$$\nabla_w J_i(u^k, w^k, v^k, t^j) = -\int_{t_0}^{t^j} \Phi_i(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t) dt, \quad (8)$$

$$\nabla_v J_i(u^k, w^k, v^k, t^j) = -\Phi_i(t_0)' \Theta(v^k), \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, N}.$$

На каждой итерации внешнего метода спроектированного лагранжиана решается вспомогательная задача минимизации модифицированного функционала Лагранжа при линеаризованных на  $k$ -м приближении ограничениях.

### 3. Алгоритм метода приведенного градиента

Введя векторные обозначения для равенств (2)–(4), построим модифицированную функцию Лагранжа для задачи (1)–(7):

$$\begin{aligned}
L = & \varphi(x(t_1)) - \lambda^{k'}[h(x(t_1)) - \bar{h}^L] + \frac{\rho}{2}[h(x(t_1)) - \bar{h}^L]'[h(x(t_1)) - \bar{h}^L] - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \mu^{k'}(t)[g(x(t), t) - \bar{g}^L]dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_1} [g(x(t), t) - \bar{g}^L]'[g(x(t), t) - \bar{g}^L]dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \gamma^k(t)[c(u, t) - \bar{c}^L]dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_1} [c(u, t) - \bar{c}^L]'[c(u, t) - \bar{c}^L]dt,
\end{aligned} \tag{9}$$

где  $\bar{h}^L = h(x^k(t_1)) + h_x(x^k(t_1))\delta x(t_1)$ ,  $\bar{g}^L = g(x^k(t), t) + g_x(x^k(t), t)\delta x(t)$ ,  $\bar{c}^L = c(u^k(t), t) + c_u(u^k(t), t)\delta u(t)$ ,  $\delta u = u - u^k$ ,  $\delta x = x - x^k$ .

Далее линеаризуем ограничения (2), (3) на  $k$ -м приближении:

$$I^k + \sum_{j=0}^N \nabla_u I^k(t^j)'(u_j - u_j^k) + \nabla_w I^k(w - w^k) + \nabla_v I^k(v - v^k) = 0, \tag{10}$$

$$J_j^k + \sum_{i=0}^j [\nabla_u J^k(t^j)'(u_i - u_i^k) + \nabla_w J^k(t^j)'(w - w^k) + \nabla_v J^k(t^j)'(v - v^k)] = 0. \tag{11}$$

Здесь  $I = (I_1, I_2, \dots, I_m)$ ,  $J = (J_1, J_2, \dots, J_s)$ . Следовательно, имеем  $m$  ограничений (10) и  $(N+1)s$  ограничений (11), которые представляют собой явную форму (через  $u, w, v$ ) линеаризованных ( $h^L, g_j^L$ ) ограничений (2), (3), причем вместо равенств (3), заданных для каждого момента  $t \in T$ , имеем  $N$  равенств, определенных в узлах сетки.

Линеаризуем также условия (4):

$$c(u^k, t^j) + \nabla_u c(u^k, t^j)'(u_j - u_j^k) = 0, \quad j = \overline{0, N}, \tag{12}$$

где  $c = (c_1, c_2, \dots, c_l)$ . Прямые ограничения на управление и параметры оставим без изменений:

$$u_j^H \leq u_j \leq u_j^B, \quad j = \overline{1, N}, \tag{13}$$

$$v_j^H \leq v_j \leq v_j^B, \quad j = \overline{1, n}, \quad w_i^H \leq w_i \leq w_i^B, \quad i = \overline{1, p}. \tag{14}$$

Конечномерная аппроксимация функционала (9), в котором переменные  $x(t)$  определены через систему (1) по заданному управлению  $u(t)$ ,  $t \in T$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
L = & \varphi(x^N) - \lambda^{k'}[h(x(t^N)) - \bar{h}^L] + \frac{\rho}{2}[h(x(t^N)) - \bar{h}^L]'[h(x(t^N)) - \bar{h}^L] - \\
& - \sum_{j=0}^N \mu_j^{k'}[g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L] + \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^N [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L]'[g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L] - \\
& - \sum_{j=0}^N \gamma_j^{k'}[c(u_j, t^j) - \bar{c}^L] + \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^N [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L]'[c(u_j, t^j) - \bar{c}^L],
\end{aligned} \tag{15}$$

где  $\bar{h}^L = h(x^k(t^N)) + h_x(x^k(t^N))(x(t^N) - x^k(t^N))$ ,  $\bar{g}^L = g(x^k(t^j), t^j) + g_x(x^k(t^j), t^j)(x(t^j) - x^k(t^j))$ ,  $\bar{c}^L = c(u^k(t^j), t^j) + c_u(u^k(t^j), t^j)(u_j - u_j^k)$ ,  $j = \overline{0, N}$ .

Для минимизации функционала (15), который по сути уже является функцией многих переменных, при линейных ограничениях (10)–(14) применяется метод приведенного градиента. Заметим, что функционал (15) предполагает использование исходной системы (1) для расчета траектории  $\{x(t^1), x(t^2), \dots, x(t^N)\}$  по заданным параметрам  $v, w$  и управлению  $u(t^0), u(t^1), \dots, u(t^N)$ , т. е. полная модель вспомогательной задачи описывается соотношениями (1), (10)–(15).

Обозначив через  $A[m + (l + s)(N + 1)] \times [r(N + 1) + p + n]$  матрицу коэффициентов линейных равенств (10)–(14), через  $\mathbf{b}$  — вектор их свободных членов размерности  $m + (l + s)(N + 1)$  и через  $\mathbf{z}$  — вектор искомых переменных ( $u_j, j = \overline{0, N}; v; w$ ) размерности  $r(N + 1) + p + n$  соответственно, поставленную задачу запишем так:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}) &\rightarrow \min, \\ A\mathbf{z} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{z}^H &\leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}^B. \end{aligned} \quad (16)$$

Для удобства изложения алгоритма будем, как принято в линейном программировании, считать размеры задачи (16) равными  $m, n$ . Для вектора  $\mathbf{z}$  и матрицы  $A$  введем разбиение  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_B, \mathbf{z}_S, \mathbf{z}_N)$ ,  $A = (B, S, N)$ , соответствующее базисным, супербазисным и небазисным переменным. Такое разбиение отличается от традиционного наличием супербазисных переменных, которые не достигают граничных значений из-за нелинейности целевой функции, но и не являются базисными.

В соответствии с таким разбиением система уравнений (16) переписывается в виде

$$B\mathbf{z}_B = -S\mathbf{z}_S - N\mathbf{z}_N + \mathbf{b}. \quad (17)$$

Опишем итерацию метода приведенного градиента.

1. *Вычисление градиента целевой функции.* Чтобы применить традиционную схему для расчета градиента, используем непрерывное представление функционала (9)

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, w, t) &= \psi'(t)f(x, u, w, t) + \mu^k(t)'[g(x, t) - \bar{g}^L] - \frac{\rho}{2}[g(x, t) - \bar{g}^L]'[g(x, t) - \bar{g}^L] + \\ &+ \gamma^k(t)'[c(u, t) - \bar{c}^L] - \frac{\rho}{2}[c(u, t) - \bar{c}^L]'[c(u, t) - \bar{c}^L], \end{aligned}$$

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(x, u, w, t)' \psi(t) - \mu^k(t)' [g_x(x, t) - g_x(x^k, t)] + \rho [g(x, t) - \bar{g}^L]' [g_x(x, t) - g_x(x^k, t)], \quad (18)$$

$$\psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) + \lambda^k [h_x(x(t_1)) - h_x(x^k(t_1))] - \rho [h(x(t_1)) - \bar{h}^L]' [h_x(x(t_1)) - h_x(x^k(t_1))], \quad (19)$$

тогда

$$\nabla_u L = -f_u(x, u, w, t)' \psi(t) + [c_u(u, t) - c_u(u^k, t)]' [-\gamma^k(t) + \rho(c(u, t) - \bar{c}^L)].$$

Здесь для  $\bar{h}^L, \bar{g}^L, \bar{c}^L$  использованы те же обозначения, что и в (15). Интегрируя в обратном времени систему (18), (19), будем считать интегралы (7), (8) и запоминать их значения в узлах сетки. Одновременно на решении (18) вычисляются градиенты по параметрам  $\nabla_w L$  и  $\nabla_v L$ . Таким образом, будет найден градиент  $L(\mathbf{z})$ :

$$\nabla L(\mathbf{z}) = (\nabla_u L, \nabla_v L, \nabla_w L).$$

Обозначим его через  $\mathbf{g}$  и выполним соответствующее разбиение  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_B, \mathbf{g}_S, \mathbf{g}_N)$ .

Из решения системы  $B'\boldsymbol{\pi} = \mathbf{g}_B$ , где  $B$  — базисная матрица, найдем вектор двойственных переменных (потенциалов)  $\boldsymbol{\pi}$  и вычислим  $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{g} - A'\boldsymbol{\pi}$  — вектор оценок.

Выполним разбиение  $\Delta = (\Delta_B, \Delta_S, \Delta_N)$ , в котором  $\Delta_S$  называется вектором приведенного градиента.

При  $\|\Delta_S\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — заданная погрешность, найдем локальный оптимум по супербазисным переменным и проверим следующий критерий оптимальности (п. 2). В противном случае перейдем к п. 3.

2. *Проверка критерия оптимальности*

$$\Delta_i \geq 0 \quad \text{при} \quad z_i = z_i^H, \quad \Delta_i \leq 0 \quad \text{при} \quad z_i = z_i^B, \quad i \in I_N,$$

*и расширение множества супербазисных переменных.* При выполнении этих условий процесс прекращается. В противном случае среди небазисных компонент в  $\Delta_N$ , нарушающих эти условия, находится максимальная по модулю компонента  $\Delta_{j_0}$ ,  $j_0 \in I_N$ , к матрице  $S$  добавляется столбец  $A_{j_0}$ , к вектору  $\Delta_S$  — компонента  $\Delta_{j_0}$ . Здесь можно выполнить также перенос и других столбцов матрицы  $N$ , оценки  $\Delta_j$  которых близки по значениям к  $\Delta_{j_0}$ , в матрицу  $S$ , чтобы сократить число дальнейших итераций.

3. *Построение направления спуска.* Оно выполняется по супербазисным переменным

$$\mathbf{p}_S = \Delta_S, \quad B\mathbf{p}_B = S\Delta_S, \quad \mathbf{p}_N = 0,$$

т. е., решив линейную систему, найдем  $\mathbf{p}_B$  и получим  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_B, \mathbf{p}_S, \mathbf{p}_N)'$ .

4. *Определение максимально возможного шага вдоль направления  $\mathbf{p}$ .* Находим максимальное значение  $\alpha$ , при котором  $\mathbf{z} + \alpha\mathbf{p}$  остается допустимым:  $\alpha_{\max} = \alpha_{i_0} = \min \alpha_i$ ,

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{z_i^B - z_i}{p_i}, & \text{если } p_i > 0, \\ \frac{z_i^H - z_i}{p_i}, & \text{если } p_i < 0, \\ \infty, & \text{если } p_i = 0. \end{cases}$$

Если  $\alpha_{\max} = 0$ , то перейти на шаг 6.

5. *Определение оптимального шага:*

$$\alpha^* = \arg \min_{0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}} L(\mathbf{z} + \alpha\mathbf{p}).$$

Полагаем  $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \alpha^*\mathbf{p}$ . Если  $\alpha^* < \alpha_{\max}$ , то переходим к п. 1. В этом случае ни одна из компонент  $\mathbf{z}_B$  и  $\mathbf{z}_S$  не достигла своей границы.

6. *Изменение базиса.* При  $\alpha^* = \alpha_{\max}$  одна из базисных или супербазисных переменных  $z_{i_0}$  достигает своей границы. Тогда она переводится в небазисные, а вместо нее вводим в базис одну из супербазисных переменных. Выбирается наиболее удаленная от своих границ переменная, чтобы обеспечить хорошую обусловленность новой базисной матрицы.

Здесь можно также присвоить граничные значения супербазисным переменным, близким к своим границам, чтобы избежать лишних итераций, переводящих их на границы. Однако нужно следить за тем, чтобы вектор  $\mathbf{z}_B$ , найденный из соотношения (17), удовлетворял заданным ограничениям. В противном случае нужно сделать более жесткий отбор близких к границе переменных (уменьшив  $\varepsilon$ , по которому определяются близкие элементы). Это сокращает поиск управлений (например, релейного типа), которые состоят в основном из граничных, т. е. небазисных, переменных вектора  $\mathbf{z}$ .

Далее, изменив разбиение  $\mathbf{z}$  и  $A$ , переходим к п. 1 на повторение итерации метода приведенного градиента.

#### 4. Алгоритм метода спроектированного лагранжиана

Рассмотрим теперь полный алгоритм решения исходной задачи (1)–(6).

1. С заданным управлением  $u_j^k$ ,  $j = \overline{0, N}$ , интегрируется система (1), и в узлах сетки запоминаются точки фазовой траектории  $x_j^k$ ,  $j = \overline{0, N}$ . Здесь  $k$  — номер итерации (первый раз  $k = 0$ ). На полученном решении линеаризуются ограничения исходной задачи и строится вспомогательная задача (10)–(15).

2. Методом приведенного градиента решается вспомогательная задача минимизации модифицированной функции Лагранжа (15) при линейных ограничениях (10)–(14). В результате будут найдены новые приближения для управления  $u_j^{k+1}$ ,  $j = \overline{0, N}$ , параметров  $w^{k+1}$  и  $v^{k+1}$ , а также для двойственных переменных  $\lambda^{k+1}$  и  $\mu_j^{k+1}$ ,  $j = \overline{0, N}$ .

3. Проверяется критерий окончания итерационного процесса как по прямым, так и по двойственным переменным:

$$\frac{|I_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1})|}{1 + \alpha^{k+1}} \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\frac{|J_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1})|}{1 + \alpha^{k+1}} \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, s},$$

где  $\alpha^{k+1} = \max\{\|u_j^{k+1}\|, j = \overline{0, N}; |w_i|, i = \overline{1, p}; |v_l|, l = \overline{1, n}\}$ ;

$$\frac{|\lambda_j^k - \lambda_j^{k+1}|}{1 + \Theta^{k+1}} \leq \varepsilon, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\frac{|\mu_{ij}^k - \mu_{ij}^{k+1}|}{1 + \Theta^{k+1}} \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{0, N};$$

$$\Theta^{k+1} = \max\{|\lambda_j^{k+1}|, j = \overline{1, m}; |\mu_{ij}^{k+1}|, i = \overline{1, s}, j = \overline{0, N}\}.$$

При нарушении хотя бы одного из этих условий выполняется новая  $k + 1$ -я итерация с п. 1. Если же эти неравенства выполняются для заданного  $\varepsilon > 0$ , то итерационный процесс прекращается, а найденные  $u_j^{k+1}$ ,  $j = \overline{0, N}$ ,  $w^{k+1}$  и  $v^{k+1}$  выдаются в качестве приближенного решения задачи оптимального управления.

При решении задачи находятся новые значения множителей Лагранжа  $\lambda_j^{k+1}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , и  $\mu_j^{k+1}(t)$ ,  $j = \overline{1, s}$ ,  $t \in T$ . Связь между значениями  $\lambda^k$ ,  $\mu^k(t)$  и  $\lambda^{k+1}$ ,  $\mu^{k+1}(t)$  устанавливается необходимым условием оптимальности для управления  $u^{k+1}$ .

**Теорема.** Если  $u^{k+1}$  — оптимальное решение вспомогательной задачи (10)–(15), то найдутся такие  $\lambda^{k+1}$  и  $\mu^{k+1}(t)$ ,  $t \in T$ , которые будут удовлетворять следующим условиям стационарности:

$$G(t) = -f_u(x^k, u^k, t)' \eta(t) - f_u(x^{k+1}, u^{k+1}, t)' \psi(t) = 0,$$

где  $\eta(t)$  и  $\psi(t)$  — решения систем

$$\dot{\eta}(t) = -f_x(x^k, u^k, t)' \eta(t) - g_x(x^k)' (\mu^{k+1}(t) - \bar{\mu}^k(t)), \quad t \in T,$$

$$\eta(t_1) = \varphi_x(x^k(t_1))' (\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}^k);$$

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(x^{k+1}, u^{k+1}, t)' \psi(t) - g_x(x^{k+1})' \bar{\mu}^k, \quad t \in T,$$

$$\psi(t_1) = -\varphi_x^0(x^{k+1}(t_1)) + \varphi_x(x^{k+1}(t_1))' \bar{\lambda}^k;$$

$$\bar{\lambda}^k = \lambda^k - \rho(I(u^{k+1}) - I^L(u^k, u^{k+1})), \quad \bar{\mu}^k(t) = \mu^k(t) - \rho(J(u^{k+1}, t) - J^L(u^k, u^{k+1}, t)),$$

$$t \in T, \quad \varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)', \quad g = (g^1, \dots, g^s)'$$

Доказательство теоремы для аналогичной задачи (без параметров) приведено в [6].

## 5. Программное обеспечение. Многометодная оптимизация управляющих функций и параметров

Многометодная технология решения задач оптимального управления [7, 8] заключается в параллельном использовании сразу нескольких итерационных методов оптимизации для поиска решения одной и той же задачи. Основной проблемой применения многометодной технологии при численном решении задач оптимального управления является выбор метода для эффективного продолжения процесса оптимизации с того момента, когда ухудшилась сходимость текущего метода. Современные операционные системы позволяют обеспечить решение задачи путем организации параллельных вычислительных потоков для одновременного проведения расчетов несколькими методами. В каждом таком потоке можно реализовывать итерационный процесс одного из методов оптимизации и решение одной задачи проводить несколькими методами одновременно. На многопроцессорных компьютерах для реализации каждого метода удобнее использовать отдельный процессор. После нахождения очередного приближения все методы оцениваются, например, по полученному приращению функционала и из них выбирается наиболее эффективный метод для продолжения оптимизации, а полученное этим методом приближение передается остальным методам в качестве начального для выполнения следующей итерации.

Продолжая итерационный процесс до получения приближения, на котором с заданной точностью будет выполнен критерий оптимальности, найдем приближенное решение задачи. При этом решение будет найдено многометодным алгоритмом, состоящим из последовательности шагов разных методов, подключаемых к процессу оптимизации с целью ускорения его сходимости. Например, в случае параллельного использования трех методов (см. рисунок) лучшее приближение будет определяться по максимуму приращения функционала, полученного на данной итерации каждым из трех методов:  $u_{i_0} = \arg \max_{i \in \{1,2,3\}} (I(u_i^k) - I(u_i^{k-1}))$ . Затем это приближение передается всем трем методам для выполнения следующей итерации:  $u_i^{k+1} = u_{i_0}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , что позволяет ускорить сходимость предлагаемой вычислительной схемы.

Таким образом, многометодная технология решения прикладных задач оптимального управления, реализованная в виде параллельных итерационных процессов оптимизации с выбором лучшего приближения, находит решение задачи с автоматическим применением разных методов оптимизации и тем самым существенно повышает эффективность поиска и надежность получения численного решения с заданной точностью в прикладных задачах оптимального управления.

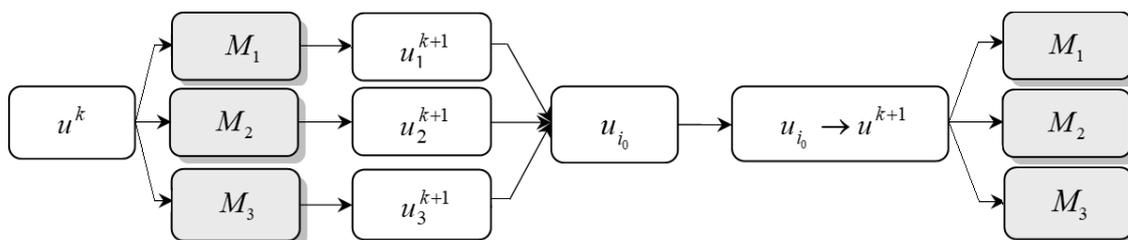


Схема выполнения  $(k + 1)$ -й итерации многометодным алгоритмом для группы из методов  $M_1, M_2, M_3$

Scheme of performing the  $(k + 1)$ th iteration by a multi-method algorithm for a group of three methods  $M_1, M_2, M_3$

## 6. Прикладные задачи

### 6.1. Задача оптимизации электроэнергетической системы

Математическая модель электроэнергетической системы (ЭЭС), построенная в СЭИ СО РАН им. Л.А. Мелентьева, представляет собой совокупность подсистем, описывающих генерирование и потребление электроэнергии, которые объединены в единую систему уравнениями электрической сети. Рассмотрим ЭЭС, состоящую из  $m$  синхронных генераторов и  $m$  паровых турбин. Каждая синхронная машина описывается дифференциальными уравнениями Парка–Горева (без учета переходных процессов в обмотке статора), которые после приведения их к стандартной форме принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{m+i}, \quad i = \overline{1, m}, \\ \dot{x}_{m+i} &= \frac{\omega_0}{T_{ji}P_{ni}} \left[ x_{5m+i} - \frac{U_i^1}{X_{di}^1} (x_{2m+i} \sin x_i + x_{3m+i} \cos x_i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{U_i^2}{X_{di}^1} (x_{2m+i} \cos x_i - x_{3m+i} \sin x_i) - D_i x_{m+i} \right], \quad i = \overline{1, m}, \\ \dot{x}_{2m+i} &= \frac{1}{T_{d0i}} \left[ x_{4m+i} - x_{2m+i} + \frac{X_{di} - X_{di}^1}{X_{di}^1} (U_i^2 \sin x_i - x_{2m+i} + U_i^1 \cos x_i) \right], \quad i = \overline{1, m}, \\ \dot{x}_{3m+i} &= \frac{1}{T_{q0i}} \left[ -x_{3m+i} - \frac{X_{qi} - X_{di}^1}{X_{di}^1} (U_i^1 \sin x_i - x_{3m+i} + U_i^1 \cos x_i) \right], \quad i = \overline{1, m}, \\ \dot{x}_{4m+i} &= \frac{1}{TR_i} \left[ E_{R0i} - x_{4m+i} + K_{Ui} (U_{0i} - \sqrt{(U_i^1)^2 + (U_i^2)^2} + \frac{K_{Ii}}{X_{di}^1} (-I_{0i} X_{di}^1 + \right. \\ &\quad \left. + ((x_{2m+i})^2 + (x_{3m+i})^2 + (U_i^1)^2 + (U_i^2)^2 - 2 \cos x_i (U_i^2 x_{3m+i} + U_i^1 x_{2m+i})) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin x_i (U_i^1 x_{3m+i} - U_i^2 x_{2m+i})^{1/2} \right) + \frac{K_{fi}}{2\pi x_{m+i}} + \frac{K_{fi}^1}{2\pi x_{2m+i}} \right], \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Уравнения динамики паровых турбин имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_{5m+i} &= \frac{1}{T_{si}} \left( -\frac{P_{ni}}{\omega_0 \sigma_{1i}} x_{m+i} + x_{6m+i} - x_{5m+i} \right), \quad i = \overline{1, m}, \\ \dot{x}_{6m+i} &= \frac{1}{T_{p2i}} \left( -\frac{P_{ni}}{\omega_0 \sigma_{2i} x_{m+i}} + u_i \right), \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Переменными состояниями  $x_{jm+i}$ ,  $j = \overline{0, 6}$ , являются угол ротора генератора, скольжение, составляющие переходной ЭДС машины в продольной и поперечной осях, напряжение обмотки возбуждения соответственно для каждого  $i = 1, 2, \dots, m$ . Управление  $U_i$  изменяет установку регулятора скорости так, чтобы обеспечить устойчивый динамический переход в заданное послеаварийное состояние при аварийных сбросах нагрузки. В правые части уравнений входят также технические параметры генераторов и турбин, смысл которых здесь приводить не будем. Число генераторов и турбин задано равным 5. Таким образом, при  $m = 5$  число дифференциальных уравнений равно 35, т.е.  $n = 35$ .

Модель электрической сети составляют алгебраические уравнения на узловые напряжения, в которые входят и переменные состояния. Эти уравнения обычно задаются в комплексных переменных, а при численном решении выполняется переход к действительным переменным. Так, например, для эксперимента было задано  $N = 14$  уравнений в комплексных переменных, а после перехода получена система из 28 алгебраических уравнений

$$C_i^1 U_i^1 - C_i^2 U_i^2 + \sum_{k=1, k \neq i}^N (-U_k^1 Y_{ik}^1 + U_k^2 Y_{ik}^2) = \frac{1}{X_{d_i}^1} (x_{2m+i} \sin x_i + x_{3m+i} \cos x_i), \quad i = \overline{1, N},$$

$$C_i^1 U_i^2 + C_i^2 U_i^1 + \sum_{k=1, k \neq i}^N (-U_k^1 Y_{ik}^2 - U_k^2 Y_{ik}^1) = \frac{1}{X_{d_i}^1} (x_{2m+i} \cos x_i + x_{3m+i} \sin x_i), \quad i = \overline{1, N},$$

где  $C_i^1 = \frac{P_{ni}}{(U_i)^2} + A_i^1$ ,  $C_i^2 = A_i^2 - \frac{Q_{ni}}{(U_i)^2}$ ,  $(U_i)^2 = (U_i^1)^2 + (U_i^2)^2$ .

Кроме того, заданы ограничения на фазовые координаты и управление

$$\begin{aligned} |x_i(t) - x_j(t)| &\leq \delta_{\max}, \quad i, j = \overline{1, m}, \\ x_{\min_i} &\leq x_{4m+i}(t) \leq x_{\max_i}, \quad i = \overline{1, 2m}, \\ U_{\min_i} &\leq U_i(t) \leq U_{\max_i}, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Целевым функционалом является функция конечного состояния (при  $t = 10$  с), измеряющая отклонение некоторых фазовых координат от заданных величин (например, мощностей).

Методом спроектированного лагранжиана было сделано 11 внешних итераций, каждая из которых содержала около 20 внутренних итераций. Заданные равенства выполнены с точностью  $10^{-6}$ , при этом ни одна из переменных не вышла на заданные ограничения. Полученное оптимальное управление обеспечивает вывод ЭЭС в требуемый режим работы за 10 с после резкого сброса нагрузки.

## 6.2. Расчет оптимального маневра для защиты задней полусферы самолета СУ-57

**Физическая постановка.** Рассмотрим модельную задачу определения оптимального противоракетного маневра обороняющегося самолета (цели), атакованного со стороны его задней полусферы ракетой класса “воздух–воздух”, запущенной самолетом противника, который находится на одном высотном эшелоне с атакованным самолетом. Управление ракетой (наведение ракеты) производится по методу параллельного сближения [13]:

$$V_p \sin \theta_p = V_F \sin \theta_F.$$

Момент окончания наведения ракеты

$$t_* = \{t : V_p(t) = V_F\}.$$

Взаимное расположение атакующей ракеты и цели описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dD}{dt} = -V_p \cos \theta_p + V_F \cos \theta_F.$$

Сделаем ряд эквивалентных преобразований сформулированной задачи. Уравнение на  $H_p$  перепишем в виде

$$\frac{d\rho_p(H_p)}{dt} = \frac{d\rho_p(H_p)}{dH_p} \frac{dH_p}{dt} = -\kappa \rho_0 \exp(-\kappa H_p) V_p \sin \theta_p.$$

Учитывая, что  $V_p \sin \theta_p = V_F \sin \theta_F$ , имеем

$$\frac{d\rho_p}{dt} = -\kappa\rho_p V_F \sin \theta_F.$$

Введем обобщенные координаты  $V = \kappa V_p$ ,  $\rho = \rho_p T$ ,  $D = \kappa D_{p-F}$ ,  $V_\kappa = \kappa V_F$ . Произведя замены

$$\cos \theta_p = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_p}, \quad \sin \theta_p = \frac{V_F}{V_p} \sin \theta_F, \quad \sin \theta_F = U$$

и учитывая, что  $\frac{dH_F}{dt} = V_F \sin \theta_F = V_p \sin \theta_p = \frac{dH_p}{dt}$ , для математической модели задачи оптимального управления получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= -V \sqrt{1 - \left(\frac{V_\kappa U}{V}\right)^2} + V_\kappa \sqrt{1 - U^2}, \quad D(0) = D_{p \max}, \quad D(t_\kappa) = 0, \\ \frac{dV}{dt} &= -\rho V - \kappa g \frac{V_\kappa}{V} U, \quad V(0) = V_0, \quad V(t_\kappa) = V_\kappa, \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho V U, \quad \rho(0) \text{ задано,} \quad \rho(t_\kappa) \text{ свободно,} \\ D_{p \max} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

**Математическая постановка.** Теперь сформулируем стандартную задачу оптимального управления с условиями на левом и правом концах интервала времени. Для этого управляемую систему задачи перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\rho V - \frac{k V_\kappa U}{V}, \quad k = \kappa g, \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho V U, \\ \frac{dD}{dt} &= -V \sqrt{1 - \left(\frac{V_\kappa U}{V}\right)^2} + V_\kappa \sqrt{1 - U^2}. \end{aligned}$$

Зададим условия в начальный момент (на левом конце)

$$V(0) = V_{p \max}, \quad \rho(0) = \rho^0, \quad D(0) \text{ неизвестно,} \quad (20)$$

и в конечный момент (на правом конце)

$$V(t_\kappa) = V_\kappa, \quad D(t_\kappa) = 0, \quad \rho(t_\kappa) \text{ свободно,} \quad (21)$$

момент окончания процесса  $t_\kappa$  определяется по условию

$$V(t_\kappa) = V_\kappa. \quad (22)$$

На всем отрезке времени должны выполняться ограничения на управление

$$U_{\min} \leq U \leq U_{\max}. \quad (23)$$

Требуется найти такой момент времени  $t_\kappa$  и удовлетворяющее ограничениям (23) управление  $U(t)$ ,  $t \in (0, t_\kappa)$ , при которых будут выполнены краевые условия (20)–(22) и будет достигнут минимум функционала

$$I(u) = D_p(0). \quad (24)$$

Поставленная задача отличается от обычной задачи оптимального управления тем, что функционал (24) определен на левом конце интервала времени при  $t = 0$ . Однако данная постановка укладывается в общую модель задачи оптимизации с параметрами, рассматриваемую пакетом оптимизации управления КОНУС [6]. В этом пакете начальные условия управляемой системы могут зависеть от параметров, по которым ведется оптимизация. Поэтому достаточно объявить  $D(0) = D_{p_{\max}}$  параметром  $p_1$  и затем минимизировать функционал (24). Равенство (22) будет краевым условием, по которому определяется момент  $t_k$ . Для этого  $t_k$  необходимо также сделать зависимым от параметра, что легко достигается заменой переменной  $t = p\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ .

Таким образом, введя параметры  $p$ ,  $p_1$ , задачу оптимального управления (20)–(24) переформулируем в задачу оптимизации с параметрами

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} &= p \left( -\rho V - \frac{kV_k U}{V} \right), \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= p(-\rho V U), \\ \frac{dD}{d\tau} &= p \left( -V \sqrt{1 - \frac{V_k U^2}{V}} + V_k \sqrt{1 - U^2} \right) \end{aligned}$$

с условиями в начальный момент при  $t = 0$

$$V(0) = V^0, \quad \rho(0) = \rho^0, \quad D(0) = p_1 \quad (25)$$

и условиями на правом конце при  $t = t_k$

$$V(t_k) = V_k, \quad D(t_k) = 0 \quad (26)$$

при тех же ограничениях на управление (23) и с функционалом вида

$$I_0(U) = p_1 \rightarrow \min. \quad (27)$$

Теперь задача минимизации  $D_{p_{\max}}$  будет заключаться в следующем: найти такие значения параметров  $p$ ,  $p_1$  и управление  $U$ , удовлетворяющее ограничениям (23), при которых будут выполнены условия (25), (26) и достигнет минимального значения функционал (27). В теории оптимального управления эта задача носит название задачи с подвижным правым и левым концами траектории. Заметим, что при решении задачи быстрогодействия сменится только функционал (27) на следующий:

$$I_0(U) = p \rightarrow \min.$$

Численные решения — оптимальные маневры, полученные пакетом прикладных программ [6] с помощью многометодного алгоритма, показывают возможность сокращения зоны возможных пусков атакующей ракеты на 40–50 %. Серия подобных расчетов выполнена для НИИ авиационных систем НПО им. П.О. Сухого при проектировании самолета пятого поколения СУ-57 [13, 14].

## Заключение

Изложенные в статье численные методы оптимизации параметров и управляющих функций конструктивно учитывают фазовые ограничения путем применения эффективных

алгоритмов линейного и нелинейного программирования для решения вспомогательных задач большой размерности. На внешних итерациях этого метода решаются задачи минимизации специально сконструированного нелинейного функционала — модифицированного лагранжиана при линейаризованных на полученном приближении фазовых ограничениях. Приближенное решение этих задач находится итерационным методом приведенного градиента с использованием сопряженной системы для расчета градиентов. Высокая трудоемкость внешней итерации этого алгоритма окупается тем, что наряду с улучшением управления здесь одновременно уточняются и значения двойственных переменных, через которые формируются необходимые условия оптимальности и вычисляется оптимальное управление в задаче с фазовыми ограничениями. Вместе с тем следует отметить, что современные информационные технологии и многопроцессорная вычислительная техника допускают достаточно эффективную реализацию сложных алгоритмов, например, путем применения параллельных вычислений.

Программное обеспечение, разработанное на основе данного подхода и реализующее многометодную технологию расчета оптимального управления и оптимальных параметров, успешно применяется для решения сложных прикладных задач оптимального управления из различных областей науки и техники. Применение эффективной технологии расчета управления особенно актуально в управляемых системах реального времени, например в системах управления летательными аппаратами, обладающих высокой маневренностью. Например, при проектировании СУ-57 (мирового лидера по маневренности) для решения серии задач оптимального маневрирования использовалось данное программное обеспечение.

**Благодарности.** Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта “Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями” (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

## Список литературы

- [1] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука; 1978: 488.
- [2] Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: линейные задачи. Минск: Университетское; 1984: 214.
- [3] Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С. Метод случайных покрытий для задачи оптимального управления. Вычислительные технологии. 2012; 17(2):31–42.
- [4] Тятюшкин А.И. Многометодная оптимизация управления в сложных прикладных задачах. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019; 59(2):235–246. DOI:10.1134/S0044466919020145.
- [5] Evtushenko Yu.G., Posypkin M.A. Method of non-uniform coverages to solve the multicriteria optimization problems with guaranteed accuracy. Automation and Remote Control. 2014; 75(6):1025–1040.
- [6] Тятюшкин А.И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука; 2006: 341.
- [7] Тятюшкин А.И. Параллельные вычисления в задачах оптимального управления. Сибирский журнал вычислительной математики. 2000; 3(2):181–190.

- [8] Габасов Р., Кириллова Ф.М., Во Тхи Тань Ха. Оптимальное управление в реальном времени многомерным динамическим объектом. Автоматика и телемеханика. 2015; 76(1):121–135.
- [9] Горнов А.Ю., Тятюшкин А.И., Финкельштейн Е.А. Численные методы для решения терминальных задач оптимального управления. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016; 56(2):224–237.
- [10] Gornov A., Zarodnyuk T., Anikin A., Sorokovikov P., Tyatyushkin A. Software engineering for optimal control problems. Lecture Notes in Networks and Systems. 2022; (424):415–426. DOI:10.1007/978-3-030-97020-8\_38.
- [11] Тятюшкин А.И. Численные методы решения задач оптимального управления с параметрами. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017; 57(10):1615–1630.
- [12] Тятюшкин А.И. Многометодные алгоритмы для решения сложных задач оптимального управления. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021; 61(2):189–205. DOI:10.31857/S0044466921020137.
- [13] Тятюшкин А.И., Федунев Б.Е. Численное исследование свойств оптимального управления в одной задаче преследования. Известия РАН. Теория и системы управления. 2005; (3):97–106.
- [14] Тятюшкин А.И., Федунев Б.Е. Возможности защиты от атакующей ракеты задней полусферы самолета вертикальным маневром. Известия РАН. Теория и системы управления. 2006; (1):125–132.

## Optimization of control in systems with phase constraints

A. I. TYATYUSHKIN, T. S. ZARODNYUK\*

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, 664033, Irkutsk, Russia

\*Corresponding author: Tatiana S. Zarodnyuk, e-mail: [tz@icc.ru](mailto:tz@icc.ru)

Received February 07, 2023, revised May 03, 2023, accepted May 11, 2023.

### Abstract

*Purpose.* A multimethod approach for finding a numerical solution to the optimal control problem with phase constraints is constructed. The approach is adapted for solution of applied problems arising in various scientific and technical fields.

*Methods.* The developed approach is based on the reduction to a finite-dimensional optimization problem and constructively takes into account phase constraints by applying effective linear and nonlinear programming algorithms to solve auxiliary problems of a large dimension. At the external iterations of this method, the problems of minimizing a specially constructed nonlinear functional (modified Lagrange function) are solved with phase constraints linearized on the obtained approximation. The solution of these problems is found by the iterative method of the reduced gradient using a conjugate system for calculating gradients. Along with improving the control in this approach,

the values of dual variables are simultaneously refined, through which the necessary optimality conditions are formed and the optimal control is calculated in the problem with phase constraints.

*Findings.* The software developed on the basis of the proposed approach and implementing the multi-method technique for calculating optimal control is successfully used to solve complex applied problems from various fields. The results of solving applied optimization problems of the electric power system and determining the optimal aircraft maneuver are presented.

*Conclusions.* Thus, the multimethod technology for solving the applied optimal control problems, implemented in the form of parallel iterative optimization processes with the choice of the best approximation, allows finding solution to the problem with the automatic application of different optimization methods and thereby significantly increases the efficiency of searching and reliability of obtaining the numerical solution with a given accuracy in applied optimal control problems.

*Keywords:* optimal control, control parameters, phase constraints, gradient methods, modified Lagrange function, sequential linearization.

*Citation:* Tyatyushkin A.I., Zarodnyuk T.S. Optimization of control in systems with phase constraints. Computational Technologies. 2023; 28(5):55–69. DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.006. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The work is supported by the Ministry of Education and Science of Russia, grant No. 121041300060-4.

## References

1. **Fedorenko R.P.** Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya [Approximate solution of optimal control problems]. Moscow: Nauka; 1978: 488. (In Russ.)
2. **Gabasov R., Kirillova F.M., Tyatyushkin A.I.** Konstruktivnye metody optimizatsii. Ch. 1: lineynye zadachi [Constructive optimization methods. Vol. 1: linear problems]. Minsk: Universitetskoe; 1984: 214. (In Russ.)
3. **Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S.** The method of stochastic coverage for optimal control problems. Computational Technologies. 2012; 17(2):31–42. (In Russ.)
4. **Tyatyushkin A.I.** Multimethod optimization of control in complicated applied problems. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019; 59(2):224–235. DOI:10.1134/S0044466919020145.
5. **Evtushenko Yu.G., Posypkin M.A.** Method of non-uniform coverages to solve the multicriteria optimization problems with guaranteed accuracy. Automation and Remote Control. 2014; 75(6):1025–1040.
6. **Tyatyushkin A.I.** Mnogometodnaya tekhnologiya optimizatsii upravlyaemykh sistem [Multimethod technology for optimization of controlled systems]. Novosibirsk: Nauka; 2006: 341. (In Russ.)
7. **Tyatyushkin A.I.** Parallel computations in optimal control problems. Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki. 2000; 3(2):181–190. (In Russ.)
8. **Gabasov R., Kirillova F.M., Vo Thi Thanh Ha.** Optimal real-time control of multidimensional dynamic plant. Automation and Remote Control. 2015; 76(1):98–110.
9. **Gornov A.Yu., Tyatyushkin A.I., Finkelshtein E.A.** Numerical methods for solving terminal optimal control problems. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016; 56(2):221–234.
10. **Gornov A., Zarodnyuk T., Anikin A., Sorokovikov P., Tyatyushkin A.** Software engineering for optimal control problems. Lecture Notes in Networks and Systems. 2022; (424):415–426. DOI:10.1007/978-3-030-97020-8\_38.
11. **Tyatyushkin A.I.** Numerical optimization methods for controlled systems with parameters. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017; 57(10):1592–1606.
12. **Tyatyushkin A.I.** Multimethod algorithms for solving complicated optimal control problems. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021; 61(2):177–193.
13. **Tyatyushkin A.I., Fedunov B.E.** Numerical study of properties of optimal control in a pursuit problem. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2005; 44(3):421–430.
14. **Tyatyushkin A.I., Fedunov B.E.** Possibilities of defense from a missile attacking from the back hemisphere by a vertical maneuver. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2006; 45(1):120–127.